第三章　离散系统的时域分析

3.1　差分方程的求解、单位序列响应、卷积和

一、填空题。

(1) 写出下列齐次方程的解。

① 已知 $y(k)-2y(k-1)=0$，$y(0)=2$，则 $y(k)=$____ $2^{k+1},k\geq 0$ ____；

② 已知 $y(k)-7y(k-1)+16y(k-2)-12y(k-3)=0$，$y(0)=0$，$y(1)=-1$，$y(2)=-3$，则 $y(k)=$____ $3^k-2^k-k\cdot 2^k,k\geq 0$ ____；

③ 已知 $y(k)-\frac{1}{3}y(k-1)=0$，$y(-1)=-1$，则 $y(k)=$____ $-3^{-(k+1)},k\geq 0$ ____。

(2) 写出下列差分方程所描述系统的零输入响应 $y_{zi}(k)$。

① 已知 $y(k)+3y(k-1)+2y(k-2)=f(k)$，$y(-1)=0$，$y(-2)=1$，则 $y_{zi}(k)=$____ $(-1)^k(2-2^{k+2}),k\geq 0$ ____；

② 已知 $y(k)+2y(k-1)+y(k-2)=f(k)-f(k-1)$，$y(-1)=1$，$y(-2)=-3$，则 $y_{zi}(k)=$____ $(-1)^k(2k+1),k\geq 0$ ____。

(3) 写出下列差分方程所描述系统的单位序列响应 $h(k)$。

① 已知 $y(k)+2y(k-1)=f(k-1)$，则 $h(k)=$____ $(-2)^{k-1}\varepsilon(k-1)$ ____；

② 已知 $y(k)+y(k-1)+\frac{1}{4}y(k-2)=f(k)$，则 $h(k)=$____ $(1+k)(-2)^{-k}\varepsilon(k)$ ____；

③ 已知 $y(k)-4y(k-1)+3y(k-2)=3f(k-2)+f(k-1)$，则 $h(k)=$

$[-\frac{3}{2}+\frac{9}{2}(3)^{k-2}]\varepsilon(k-2)+[-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}(3)^{k-1}]\varepsilon(k-1)$ 或 $(3^k-2)\varepsilon(k-3)+\delta(k-1)+7\delta(k-2)$

二、已知某 LTI 离散系统的阶跃响应 $g(k)=\left(\frac{1}{2}\right)^k\varepsilon(k)$，求其单位序列响应。

解：$h(k)=\nabla g(k)=g(k)-g(k-1)=(\frac{1}{2})^k\varepsilon(k)-(\frac{1}{2})^{k-1}\varepsilon(k-1)$

$=(\frac{1}{2})^k\varepsilon(k)-(\frac{1}{2})^{k-1}[\varepsilon(k)-\delta(k)]=2\delta(k)-(\frac{1}{2})^k\varepsilon(k)$

三、各序列 $f_i(k)$的图形如图 3.1.1 所示，求下列卷积和。

(1) $f_1(k) * f_2(k)$;　　(2) $f_1(k) * f_3(k)$;

(3) $f_2(k) * f_3(k)$;　　(4) $[f_2(k)-f_1(k)] * f_3(k)$ 。

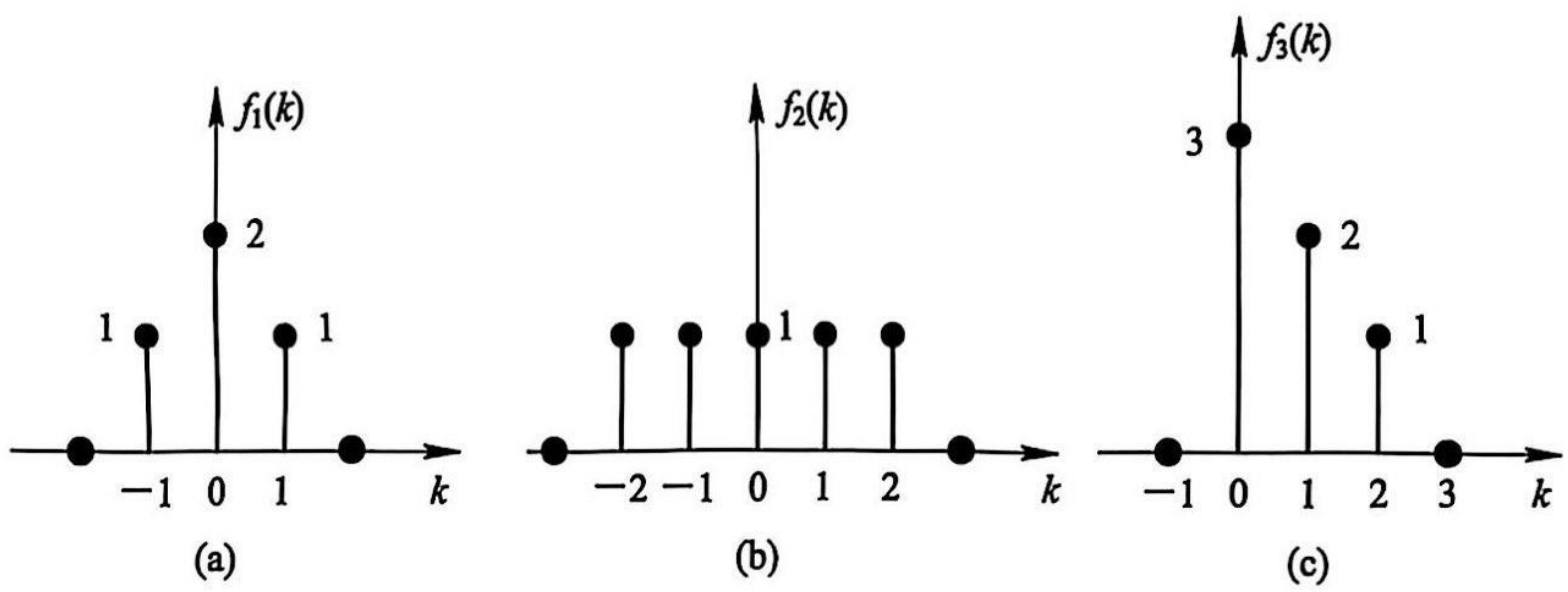

图 3.1.1

解：(1) $f_1(k)=\delta(k+1)+2\delta(k)+\delta(k-1)$， $f_2(k)=\varepsilon(k+2)-\varepsilon(k-3)$

$$f_1 * f_2 =[\delta(k+1)+2\delta(k)+\delta(k-1)]*[\varepsilon(k+2)-\varepsilon(k-3)]$$
$$=\varepsilon(k+3)+2\varepsilon(k+2)+\varepsilon(k+1)-\varepsilon(k-2)-2\varepsilon(k-3)-\varepsilon(k-4)$$

(2) $f_3(k)=3\delta(k)+2\delta(k-1)+\delta(k-2)$

$$f_1 * f_3 =[\delta(k+1)+2\delta(k)+\delta(k-1)]*[3\delta(k)+2\delta(k-1)+\delta(k-2)]$$
$$=3\delta(k+1)+8\delta(k)+8\delta(k-1)+4\delta(k-2)+\delta(k-3)$$

(3) $f_2 * f_3 =[\varepsilon(k+2)-\varepsilon(k-3)]*[3\delta(k)+2\delta(k-1)+\delta(k-2)]$

$$=3\varepsilon(k+2)+2\varepsilon(k+1)+\varepsilon(k)-3\varepsilon(k-3)-2\varepsilon(k-4)-\varepsilon(k-5)$$

(4) $(f_2-f_1) * f_3 =[\delta(k+2)-\delta(k)+\delta(k-2)]*[3\delta(k)+2\delta(k-1)+\delta(k-2)]$

$$=3\delta(k-2)+2\delta(k+1)-2\delta(k)-2\delta(k-1)+2\delta(k-2)+2\delta(k-3)+\delta(k-4)$$

3.2 离散系统的时域分析

一、已知某 LTI 离散系统的输入 $f(k)=\begin{cases}1, & k=0\\4, & k=1,2\\0, & 其余\end{cases}$ 时，其零状态响应为 $y(k)=\begin{cases}0, & k<0\\9, & k\geq 0\end{cases}$，求系统的单位序列响应 $h(k)$。

解：$f(k)=\delta(k)+4\delta(k-1)+4\delta(k-2)$，$y(k)=9\varepsilon(k)$，$y(k)=f(k)*h(k)$，

即 $[\delta(k)+4\delta(k-1)+4\delta(k-2)]*h(k)=9\varepsilon(k)$，

$\therefore h(k)+4h(k-1)+4h(k-2)=9\varepsilon(k)$

$h(k)=[C_1(-2)^k+C_2k(-2)^k+1]\varepsilon(k)$，

又 $h(0)=9\varepsilon(0)-4h(-1)-4h(-2)=9$，$h(1)=9\varepsilon(1)-4h(0)-4h(-1)=-27$，

代入初始条件得 $\begin{cases}C_1+1=9\\-2C_1-2C_2+1=-27\end{cases}$，即 $\begin{cases}C_1=8\\C_2=6\end{cases}$，

$\therefore \boxed{h(k)=[(8+6k)(-2)^k+1]\varepsilon(k)}$

二、复合系统如图 3.2.1 所示，已知 $h_1(k)=\varepsilon(k)$，$h_2(k)=\varepsilon(k-4)$，$h_3(k)=\delta(k-1)$，试求：(1) 复合系统的单位序列响应 $h(k)$；(2) 当输入 $f(k)=\varepsilon(k)$时的零状态响应。

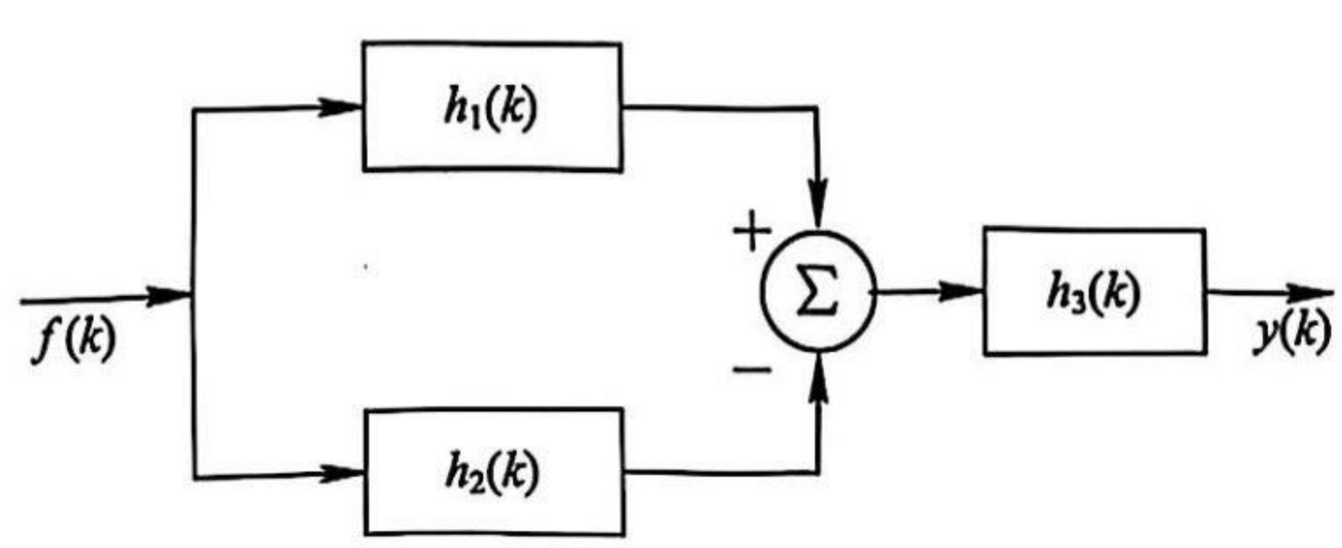

图 3.2.1

解：(1) $h(k)=\delta(k)*[h_1(k)-h_2(k)]*h_3(k)=[\varepsilon(k)-\varepsilon(k-4)]*\delta(k-1)=\varepsilon(k-1)-\varepsilon(k-5)$

(2) $g(k)=f(k)*h(k)=\varepsilon(k)*[\varepsilon(k-1)-\varepsilon(k-5)]$

$=\varepsilon(k)*[\delta(k-1)+\delta(k-2)+\delta(k-3)+\delta(k-4)]$

$=\varepsilon(k-1)+\varepsilon(k-2)+\varepsilon(k-3)+\varepsilon(k-4)$

三、某 LTI 离散系统的输入 $f(k)=\delta(k)+\delta(k-2)$，测出该系统的零状态响应 $y_{zs}(k)$ 如图 3.2.2 所示，求系统的单位序列响应 $h(k)$。

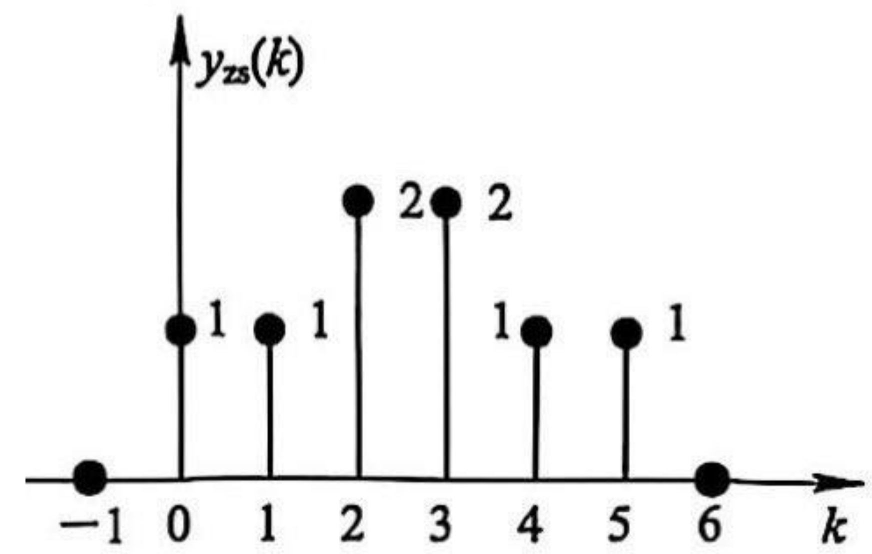

图 3.2.2

解：

$y_{zs}(k)=\varepsilon(k)-\varepsilon(k-6)+\varepsilon(k-2)-\varepsilon(k-4)$，又 $f(k)*h(k)=y_{zs}(k)$ 且 $f(k)=\delta(k)+\delta(k-2)$

$\therefore h(k)+h(k-2)=y_{zs}(k)$，

选取 $h_1(k)$，使 $h_1(k)+h_1(k-2)=\varepsilon(k)$，

$h_1(k)=(C_1\cos\frac{k\pi}{2}+C_2\sin\frac{k\pi}{2}+\frac{1}{2})\varepsilon(k)$

$h_1(0)=\varepsilon(0)-h_1(-2)=1$，$h_1(1)=\varepsilon(1)-h_1(-1)=1$

代入初始条件，得 $\begin{cases}C_1+1/2=1\\C_2+1/2=1\end{cases}$，即 $C_1=1/2$，$C_2=1/2$，

$\therefore h_1(k)=\frac{1}{2}(\cos\frac{k\pi}{2}+\sin\frac{k\pi}{2}+1)\varepsilon(k)$

$\therefore h(k)=h_1(k)-h_1(k-6)+h_1(k-2)-h_1(k-4)$

$=\frac{1}{2}(\cos\frac{k\pi}{2}+\sin\frac{k\pi}{2})[\varepsilon(k)-\varepsilon(k-2)-\varepsilon(k-4)+\varepsilon(k-6)]+\frac{1}{2}[\varepsilon(k)+\varepsilon(k-2)-\varepsilon(k-4)-\varepsilon(k-6)]$

$=\varepsilon(k)-\varepsilon(k-4)$

四、已知某 LTI 离散系统，当输入 $f(k)=\delta(k-1)$ 时，系统的零状态响应 $y_{zs}(k)=\left(\frac{1}{2}\right)^k\varepsilon(k-1)$，试求当输入 $f(k)=2\delta(k)+\varepsilon(k)$ 时，系统的零状态响应。

解： $\delta(k-1)*h(k)=h(k-1)=(\frac{1}{2})^k\varepsilon(k-1)$，

$\therefore h(k)=(\frac{1}{2})^{k+1}\varepsilon(k)$，

当 $f(k)=2\delta(k)+\varepsilon(k)$ 时，

$y_f(k)=f(k)*h(k)=2(\frac{1}{2})^{k+1}\varepsilon(k)+\varepsilon(k)*(\frac{1}{2})^{k+1}\varepsilon(k)$

$=2(\frac{1}{2})^{k+1}\varepsilon(k)+[1-(\frac{1}{2})^{k+1}]\varepsilon(k)$

$=\boxed{[1+(\frac{1}{2})^{k+1}]\varepsilon(k)}$

第三章　离散系统的时域分析

3.3 综　　合

一、填空题。

(1) 任意序列 $f(k)$ 与单位序列信号 $\delta(k)$ 的关系为 $f(k)*\delta(k)=f(k)$；

(2) 单位阶跃序列与单位序列的关系为 $\varepsilon(k)=\sum_{i=-\infty}^{k}\delta(i)$ 或 $\delta(k)=\varepsilon(k)-\varepsilon(k-1)$

(3) 阶跃响应 $g(k)$ 与单位序列响应 $h(k)$ 的关系为 $g(k)=\sum_{i=-\infty}^{k}h(i)$ 或 $h(k)=g(k)-g(k-1)$

(4) 已知 $f_1(k)=\left(\frac{1}{3}\right)^k\varepsilon(k)$，$f_2(k)=\varepsilon(k)-\varepsilon(k-3)$，$f(k)=f_1(k)*f_2(k)$，则 $f(2)=$ 13/9，$f(4)=$ 13/81。

二、已知某 LTI 离散系统的方程为

$$y(k)-y(k-1)-2y(k-2)=\varepsilon(k)$$

且 $y(0)=0$，$y(1)=1$，求系统的零输入响应 $y_{zi}(k)$、零状态响应 $y_{zs}(k)$ 以及全响应 $y(k)$。

解： 零状态响应　$y_{zs}(k)[C_1\cdot 2^k+C_2\cdot(-1)^k-\frac{1}{2}]\varepsilon(k)$，

又 $y_{zs}(0)=\varepsilon(0)+y_{zs}(-1)+2y_{zs}(-2)=1$，$y_{zs}(1)=\varepsilon(1)+y_{zs}(0)+2y_{zs}(-1)=2$，

代入初始条件，得 $\begin{cases}C_1+C_2-1/2=1\\2C_1-C_2-1/2=2\end{cases}$，即 $C_1=\frac{4}{3}$，$C_2=\frac{1}{6}$

$\therefore \boxed{y_{zs}(k)=[\frac{4}{3}\cdot 2^k+\frac{1}{6}\cdot(-1)^k-\frac{1}{2}]\varepsilon(k)}$

零输入响应　$y_{zi}(k)=[D_1\cdot 2^k+D_2\cdot(-1)^k]\varepsilon(k)$，

又 $y_{zi}(0)=y(0)-y_{zs}(0)=0-1=-1$，$y_{zi}(1)=y(1)-y_{zs}(1)=1-2=-1$，

代入初始条件，得 $\begin{cases}D_1+D_2=-1\\2D_1-D_2=-1\end{cases}$，即 $D_1=-\frac{2}{3}$，$D_2=-\frac{1}{3}$

$\therefore \boxed{y_{zi}(k)=[-\frac{2}{3}\cdot 2^k-\frac{1}{3}\cdot(-1)^k]\varepsilon(k)}$，

全响应　$y(k)=y_{zi}(k)+y_{zs}(k)=[\frac{2}{3}\cdot 2^k-\frac{1}{6}\cdot(-1)^k-\frac{1}{2}]\varepsilon(k)$

三、某 LTI 离散系统如图 3.3.1 所示，试求：

(1) 该系统的差分方程；

(2) 当 $f(k)=\delta(k)$，全响应的初始条件 $y(0)=1$，$y(-1)=-1$ 时，系统的零输入响应 $y_{zi}(k)$；

(3) 当 $f(k)=\delta(k)$时，系统的零状态响应 $y_{zs}(k)$。

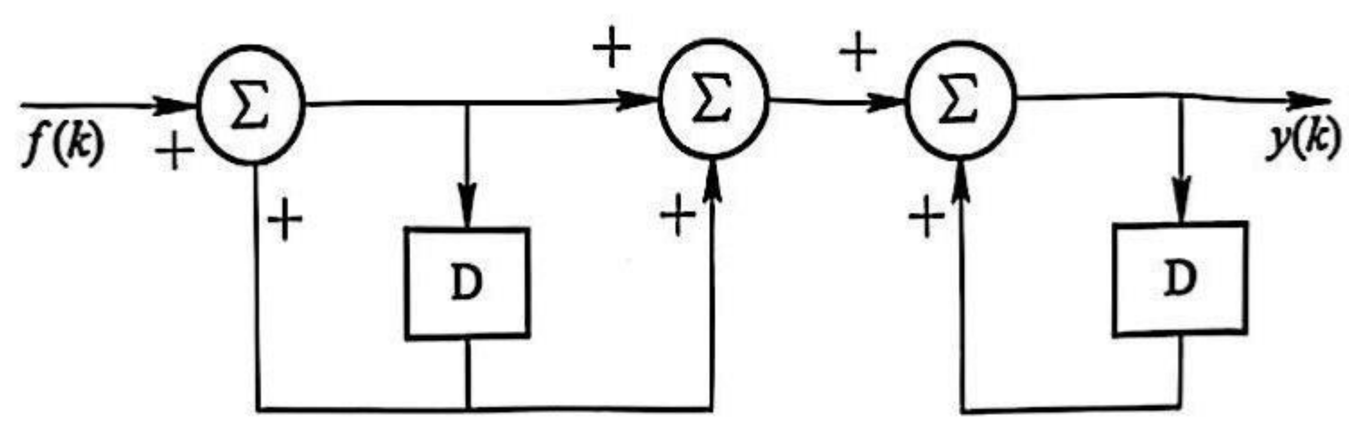

图 3.3.1

解： (1) 设第一个加法器的输出为 $x(k)$，则 $\begin{cases} x(k)=f(k)+x(k-1) \\ y(k)=x(k)+x(k-1)+y(k-1) \end{cases}$，

消去 $x(k)$，得系统的差分方程为 $\boxed{y(k)-2y(k-1)+y(k-2)=f(k)+f(k-1)}$

(2) 零输入响应 $y_{zi}(k)=(C_1+C_2k)\varepsilon(k)$，

又 $y_{zs}(0)=\delta(0)+\delta(-1)+2y_{zs}(-1)-y_{zs}(-2)=1$，

∴ $y_{zi}(0)=y(0)-y_{zs}(0)=1-1=0$， $y_{zi}(-1)=y(-1)=-1$，

代入初始条件，得 $\begin{cases} C_1=0 \\ C_1-C_2=-1 \end{cases}$ 即 $C_1=0$, $C_2=1$，

∴ $\boxed{y_{zi}(k)=k\varepsilon(k)}$

(3) 选取 $h_1(k)$，使 $h_1(k)-2h_1(k-1)+h_1(k-2)=\delta(k)$，

则 $h_1(k)=(D_1+D_2k)\varepsilon(k)$，

又 $h_1(0)=\delta(0)+2h_1(-1)-h_1(-2)=1$， $h_1(1)=\delta(1)+2h_1(0)-h_1(-1)=2$，

代入初始条件，得 $\begin{cases} D_1=1 \\ D_1+D_2=2 \end{cases}$，即 $D_1=1$, $D_2=1$，

∴ $h_1(k)=(1+k)\varepsilon(k)$

∴ $\boxed{y_{zs}(k)}=h_1(k)+h_1(k-1)\boxed{=(1+k)\varepsilon(k)+k\varepsilon(k-1)}$