第三章　离散系统的时域分析

3.1　差分方程的求解、单位序列响应、卷积和

一、填空题。

(1)写出下列齐次方程的解。

① 已知 y(k)-2y(k-1)=0,　y(0)=2, 则 y(k)= $2^{k+1}, k\geq 0$；

② 已知 y(k)-7y(k-1)+16y(k-2)-12y(k-3)=0,y(0)=0,y(1)=-1,y(2)=-3，则 y(k)= $3^k-2^k-k\cdot 2^k, k\geq 0$；

③已知 $y(k)-\frac{1}{3}y(k-1)=0$，$y(-1)=-1$，则 y(k)= $-3^{-(k+1)}, k\geq 0$。

(2)写出下列差分方程所描述系统的零输入响应 $y_{zi}(k)$.

① 已知 y(k)+3y(k-1)+2y(k-2)= f(k),　y(-1)= 0,　y(-2)=1, 则 $y_{zi}(k)=$ $(-1)^k(2-2^{k+2}), k\geq 0$；

② 已知 y(k)+2y(k-1)+y(k-2)=f(k)-f(k-1),　y(-1)=1,　y(-2)=-3, 则 yzi(k)= $(-1)^k(2k+1), k\geq 0$。

(3)写出下列差分方程所描述系统的单位序列响应h(k)。

①已知 $y(k)+2y(k-1)=f(k-1)$，则 h(k)= $(-2)^{k-1}\varepsilon(k-1)$；

②已知 $y(k)+y(k-1)+\frac{1}{4}y(k-2)=f(k)$，则 h(k)= $(k+1)(-2)^k\varepsilon(k)$；

③ 已知 y(k)-4y(k-1)+3y(k-2)=3f(k-2)+f(k-1)，则 $h(k)=$ $(3^k-2)\varepsilon(k-3)+\delta(k-1)+7\delta(k-2)$

二、已知某 LTI离散系统的阶跃响应 $g(k)=\left(\frac{1}{2}\right)^k\varepsilon(k)$，求其单位序列响应。

$h(k)=\nabla g(k)=g(k)-g(k-1)=2\delta(k)-(\frac{1}{2})^k\varepsilon(k)$

三、各序列$f_i(k)$的图形如图3.1.1所示，求下列卷积和。

(1) $f_1(k) * f_2(k)$；　　(2) $f_1(k) * f_3(k)$；

(3) $f_2(k) * f_3(k)$；　　(4) $[f_2(k) - f_1(k)] * f_3(k)$ 。

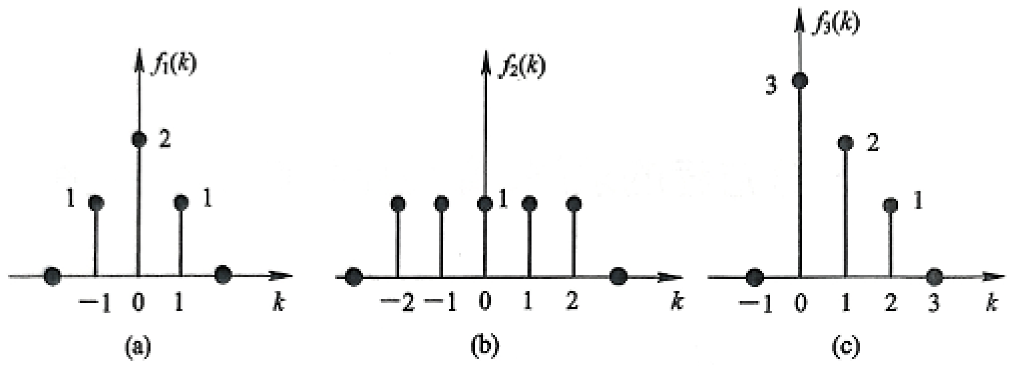

图 3.1.1

(1) $f_1(k) = \delta(k+1) + 2\delta(k) + \delta(k-1)$

$f_2(k) = \varepsilon(k+2) - \varepsilon(k-3)$

$f_1 * f_2 = \varepsilon(k+3) + 2\varepsilon(k+2) + \varepsilon(k+1) - \varepsilon(k-2) - 2\varepsilon(k-3) - \varepsilon(k-4)$

(2) $f_3(k) = 3\delta(k) + 2\delta(k-1) + \delta(k-2)$

$f_1 * f_3 = 3\delta(k+1) + 8\delta(k) + 8\delta(k-1) + 4\delta(k-2) + \delta(k-3)$

(3) $f_2 * f_3 = 3\varepsilon(k+2) + 2\varepsilon(k+1) + \varepsilon(k) - 3\varepsilon(k-3) - 2\varepsilon(k-4) - \varepsilon(k-5)$

(4) $(f_2 - f_1) * f_3 = 3\delta(k-2) + 2\delta(k+1) - 2\delta(k) - 2\delta(k-1) + 2\delta(k-2) + 2\delta(k-3) + \delta(k-4)$

3.2　离散系统的时域分析

一、已知某 LTI 离散系统的输入 $f(k)=\begin{cases}1, & k=0\\ 4, & k=1,2\\ 0, & \text{其余}\end{cases}$ 时，其零状态响应为 $y(k)=\begin{cases}0, & k<0\\ 9, & k\geqslant 0\end{cases}$，求系统的单位序列响应h(k)。

$f(k)=\delta(k)+4\delta(k-1)+4\delta(k-2)+4\delta(k-2)\qquad y(k)=9\varepsilon(k)$

$y(k)=f(k)*h(k)=h(k)+4h(k-1)+4h(k-2)=9\varepsilon(k)$

$x^2+4x+4=0\qquad x_1=x_2=-2$

令 $h(k)=[C_1(-2)^k+C_2k(-2)^k+1]\varepsilon(k)$

$h(0)=9\qquad h(1)=-27$

$\begin{cases}C_1=8\\ C_2=6\end{cases}$

$\therefore h(k)=[(8+6k)(-2)^k+1]\varepsilon(k)$

二、复合系统如图3.2.1所示，已知 $h_1(k)=\varepsilon(k)$，$h_2(k)=\varepsilon(k-4)$，$h_3(k)=\delta(k-1)$，试求：(1)复合系统的单位序列响应h(k)；(2)当输入 $f(k)=\varepsilon(k)$时的零状态响应。

$h(k)=\delta(k)*[h_1(k)-h_2(k)]*h_3(k)$

$=\varepsilon(k-1)-\varepsilon(k-5)$

(2) $g(k)=\varepsilon(k)*[\varepsilon(k-1)-\varepsilon(k-5)]$

$=\varepsilon(k-1)+\varepsilon(k-2)+\varepsilon(k-3)+\varepsilon(k-4)$

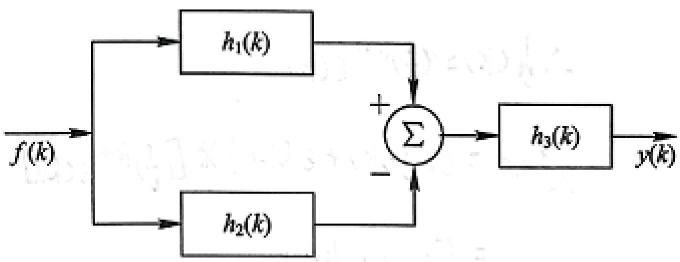

图 3.2.1

三、某LTI离散系统的输入 $f(k)=\delta(k)+\delta(k-2)$,，测出该系统的零状态响应 $y_{zs}(k)$ 如图3.2.2所示，求系统的单位序列响应h(k)。

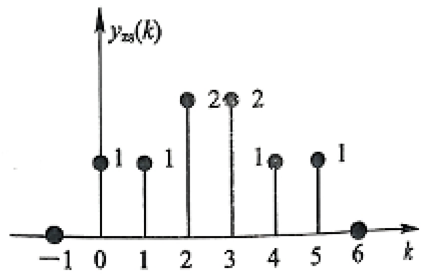

图 3.2.2

$y_{zs}(k)=\varepsilon(k)-\varepsilon(k-6)+\varepsilon(k-2)-\varepsilon(k-4)$

$\begin{cases} f(k)*h(k)=y_{zs}(k) \\ f(k)=\delta(k)+\delta(k-2) \end{cases}$

$h(k)+h(k-2)=y_{zs}(k)$

令 $h_0(k)+h_0(k-2)=\varepsilon(k)$

$h_0(k)=\frac{1}{2}(\cos\frac{k\pi}{2}+\sin\frac{k\pi}{2}+1)\varepsilon(k)$

$h(k)=h_0(k)-h_0(k-6)+h_0(k-2)-h_0(k-4)$

$=\varepsilon(k)-\varepsilon(k-4)$

四、已知某LTI离散系统，当输入 $f(k)=\delta(k-1)$时，系统的零状态响应 $y_{zs}(k)=\left(\frac{1}{2}\right)^k\varepsilon(k-1)$，试求当输入 $f(k)=2\delta(k)+\varepsilon(k)$时，系统的零状态响应。

$\delta(k-1)*h(k)=h(k-1)=(\frac{1}{2})^k\varepsilon(k-1)$

$\therefore h(k)=(\frac{1}{2})^{k+1}\varepsilon(k)$

$y_{zs}=[2\delta(k)+\varepsilon(k)]*[(\frac{1}{2})^{k+1}\varepsilon(k)]$

$=[1+(\frac{1}{2})^{k+1}]\varepsilon(k)$

第三章　离散系统的时域分析

3.3　综　　合

一、填空题。

(1)任意序列 f(k)与单位序列信号 δ(k)的关系为 $f(k)*\delta(k)=f(k)$ ；

(2)单位阶跃序列与单位序列的关系为 $\delta(k)=\varepsilon(k)-\varepsilon(k-1)$ ；

(3)阶跃响应 g(k)与单位序列响应h(k)的关系为 $h(k)=g(k)-g(k-1)$ ；

(4) 已知 $f_1(k)=\left(\frac{1}{3}\right)^k\varepsilon(k)$，$f_2(k)=\varepsilon(k)-\varepsilon(k-3)$，$f(k)=f_1(k)*f_2(k)$，则 f(2)= $\frac{13}{9}$,f(4)= $\frac{13}{81}$ 。

二、已知某LTI离散系统的方程为

$$y(k)-y(k-1)-2y(k-2)=\varepsilon(k)$$

且 y(0)=0,y(1)=1,求系统的零输入响应 $y_{26}(k)$、零状态响应$y_{28}(k)$以及全响应y(k)。

$y_{zs}(k)[C_1\cdot 2^k+C_2\cdot(-1)^k-\frac{1}{2}]\varepsilon(k)$

又 $y_{zs}(0)=\varepsilon(0)+y_{zs}(-1)+2y_{zs}(-2)=1$

$y_{zs}(1)=\varepsilon(1)+y_{zs}(0)+2y_{zs}(-1)=2$

代入得 $\begin{cases}C_1=\frac{4}{3}\\ C_2=\frac{1}{6}\end{cases}$

$\therefore y_{zs}(k)=[\frac{4}{3}\cdot 2^k+\frac{1}{6}(-1)^k-\frac{1}{2}]\varepsilon(k)$

$y_{zi}(k)=[D_1\cdot 2^k+D_2\cdot(-1)^k-\frac{1}{2}]\varepsilon(k)$

又 $y_{zi}(0)=y(0)-y_{zs}(0)=-1$

$y_{zi}(1)=-1$

代入得 $\begin{cases}D_1=-\frac{2}{3}\\ D_2=-\frac{1}{3}\end{cases}$

$y_{zi}(k)=[-\frac{2}{3}\cdot 2^k-\frac{1}{3}(-1)^k]\varepsilon(k)$

~~∴ $y_{zi}(k)=$~~ $\therefore y(k)=[\frac{2}{3}\cdot 2^k-\frac{1}{6}(-1)^k-\frac{1}{2}]\varepsilon(k)$

三、某LTI离散系统如图3.3.1所示，试求:

(1)该系统的差分方程;

(2) 当 $f(k)=\delta(k)$，全响应的初始条件 $y(0)=1$，$y(-1)=-1$ 时，系统的零输入响应 $y_{zi}(k)$；

(3) 当 $f(k)=\delta(k)$时，系统的零状态响应 $y_{zs}(k)$。

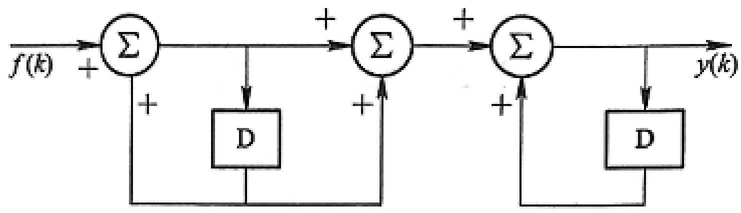

图 3.3.1

(1) $y(k)-2y(k-1)+y(k-2)=f(k)+f(k-1)$

(2) $\lambda_1=\lambda_2=1$

$y_{zi}(k)=(C_1+C_2k)\varepsilon(k)$

$y_{zs}(0)=1$

$y_{zi}(0)=0$

$y_{zi}(-1)=-1$

解得 $\begin{cases} C_1=0 \\ C_2=1 \end{cases}$

$\therefore y_{zi}(k)=k\varepsilon(k)$

(3) $h_0(k)=(C_1'+C_2'k)\varepsilon(k)$

$h_0(0)=1 \quad h_0(1)=2$

解得 $\begin{cases} C_1'=1 \\ C_2'=1 \end{cases}$

$\therefore h_0(k)=(1+k)\varepsilon(k)$

$y_{zs}(k)=h_0(k)+h_0(k-1)$

$=(k+1)\varepsilon(k)+k\varepsilon(k-1)$